Exercice n° 1 : éléments de réduction et axe central d'un torseur

Notions abordées

- **Invariant scalaire**
- **Pas d'un torseur**
- **Eléments de réduction**
- **Equation vectorielle de l'axe central**

On considère le torseur $[T]$ défini au point *A (2, 0, 1)*, relativement à un repère orthonormé $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$[T] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = 4\vec{x} - 2\vec{y} \\ \vec{M}(A) = 3\vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} \end{array} \right._A$$

Q1- Calculer l'invariant scalaire I_S de $[T]$.

Q2- Calculer le pas de ce torseur.

Q3- En déduire ses éléments de réduction au point *O*.

Q4- Déterminer l'équation vectorielle de l'axe central.

Solution détaillée

R1- $I_S = \vec{R}.\vec{M}(A) = (4\vec{x} - 2\vec{y}).(3\vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z}) = 4 \times 3 + (-2) \times (-1) + 0 \times 2 = 14$

R2- Le pas du torseur est donné par :

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{R}.\vec{M}(A)}{\vec{R}^2} = \frac{I_S}{\vec{R}^2} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}}$$

R3- La loi de transport des moments nous permet d'écrire :

$$\vec{M}(O) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{[T] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = 4\vec{x} - 2\vec{y} \\ \vec{M}(O) = 5\vec{x} + 3\vec{y} - 2\vec{z} \end{array} \right._O}$$

R4- Equation vectorielle de l'axe central :

soit P un point de l'axe central, alors :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{R^2} + \lambda\ \vec{R} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}4+4\lambda\\8-2\lambda\\22\end{pmatrix}$$

Exercice n° 2 : moment et axe central d'un torseur

Notions abordées

- **Pas d'un torseur**
- **Moment central**
- **Equation vectorielle de l'axe central**

On considère le torseur $[T]$ défini au point $A\ (0,\ 3,\ 2)$, relativement à un repère orthonormé $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$[T] = \begin{cases} \vec{R} = 2\vec{x} + \vec{z} \\ \vec{M}(A) = 3\vec{y} + 4\vec{z} \end{cases}_A$$

Q1- Calculer l'automoment de $[T]$.

Q2- Calculer le pas du torseur.

Q3- Calculer le moment central.

Q4- Déterminer l'équation vectorielle de l'axe central.

Q5- En déduire les coordonnées du point de l'axe central appartenant au plan $(O,\vec{y},\vec{z})$.

Solution détaillée

R1- $I_S = \vec{R}.\vec{M}(A) = (2\vec{x} + \vec{z}).(3\vec{y} + 4\vec{z}) = 1 \times 4 = 4$

R2- Le pas du torseur est donné par :

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{R}.\vec{M}(A)}{\vec{R}^2} = \frac{I_S}{\vec{R}^2} = \frac{4}{5}}$$

R3- Le moment sur l'axe central est :

$$\boxed{\vec{M}(P) = \lambda\ \vec{R} = \frac{4}{5}(2\vec{x} + \vec{z})}$$

où P est un point de l'axe central.

R4- Equation vectorielle de l'axe central :
soit P un point de l'axe central, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(A)}{R^2} + \alpha\,\vec{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3+2\alpha\\-8\\6+\alpha\end{pmatrix}}$$

R5- Soit B le point de l'axe central appartenant au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$, alors $B\ (0, y, z)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0-0\\y-3\\z-2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3+2\alpha\\-8\\6+\alpha\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0 = \frac{-3}{5} + \frac{2}{5}\alpha\\ y-3 = -\frac{8}{5}\\ z-2 = \frac{6+\alpha}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{3}{2}\\ y = \frac{7}{5}\\ z = \frac{7}{2}\end{cases}$$

d'où : $B(0{,}7/5{,}7/2)$

Exercice n° 3 : éléments de réduction et axe central d'un torseur

Notions abordées

- **Eléments de réduction**
- **Pas d'un torseur**
- **Axe central**
- **Comoment de deux torseurs**

On considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ définis au point $A\ (2,\ 0{,}1)$, relativement à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par :

$$[T_1] = {}_A\begin{cases}\vec{R}_1 = 2\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z}\\ \vec{M}_1(A) = \vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}\end{cases}$$

$$[T_2] = {}_A\begin{cases}\vec{R}_2 = -3\vec{x} + 4\vec{z}\\ \vec{M}_2(A) = 3\vec{y} + 2\vec{z}\end{cases}$$

Q1- Déterminer les éléments de réduction des deux torseurs au point O.
Q2- Calculer le pas du torseur $[T_1]$.
Q3- Déterminer l'axe central du torseur $[T_2]$.
Q4- Calculer le comoment des deux torseurs.

Solution détaillée

R1- Moments en O des deux torseurs :

$$\vec{M}_1(O) = \vec{M}_1(A) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2(O) = \vec{M}_2(A) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{[T_1] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_1 = 2\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z} \\ \vec{M}_1(O) = -2\vec{x} + 2\vec{y} + 5\vec{z} \end{cases}}$$

$$\boxed{[T_2] = {}_O\begin{cases} \vec{R}_2 = -3\vec{x} + 4\vec{z} \\ \vec{M}_2(O) = -8\vec{y} + 2\vec{z} \end{cases}}$$

R2- Pas du torseur $[T_1]$:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\vec{R}_1.\vec{M}_1(A)}{\vec{R}_1^{\,2}} = \frac{I_S([T_1])}{\vec{R}_1^{\,2}} = \frac{7}{14}}$$

R3- Soit P un point de l'axe central, alors :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_2(O)}{\vec{R}_2^{\,2}} + \alpha\,\vec{R} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 32-3\alpha \\ 6 \\ 24+4\alpha \end{pmatrix}$$

R4- Le comoment des deux torseurs est donné par :

$$\boxed{[T_1]\otimes[T_2] = \vec{R}_1.\vec{M}_2(O) + \vec{R}_2.\vec{M}_1(O) = -22 + 26 = 4}$$

Exercice n° 4 : somme de glisseurs

Notions abordées

- **Eléments de réduction**
- **Invariant scalaire**
- **Equations analytiques de l'axe central**

Soient les points et les vecteurs donnés par leurs coordonnées dans le repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$A_1\ (0,1,0)$; $A_2\ (0,2,0)$ et $A_3\ (1,0,0)$

$\vec{R}_1 = 2\vec{y}$; $\vec{R}_2 = -2\vec{y}+\vec{z}$ et $\vec{R}_3 = -\vec{x}$

et soit $[T]$ le torseur somme des glisseurs $[G_1]$, $[G_2]$ et $[G_3]$ dont les supports contiennent respectivement A_1, A_2, A_3 et dont les résultantes sont $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ et $\vec{R}_3$.

Q1- Déterminer les éléments de réduction de $[T]$ au point O.

Q2- En déduire la valeur de l'invariant scalaire de $[T]$.

Q3- Déterminer analytiquement les équations de l'axe central de $[T]$ en précisant la relation qui lie le moment résultant $\vec{H}(P)$ à la résultante $\vec{R}$ où P est un point de l'axe central.

Solution détaillée

R1-

$$\boxed{[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1+\vec{R}_2+\vec{R}_3 = -\vec{x}+\vec{z} \\ \vec{H}(O) = \overrightarrow{OA_1}\wedge\vec{R}_1+\overrightarrow{OA_2}\wedge\vec{R}_2+\overrightarrow{OA_3}\wedge\vec{R}_3 = 2\vec{x} \end{cases}}$$

R2-

$$\boxed{I_S = \vec{R}.\vec{H}(O) = -2}$$

R3- L'axe central es l'ensemble des points P tel que :

$$\vec{H}(P) = \lambda\vec{R} \iff \vec{R}\wedge\vec{H}(P) = \vec{0} \iff \vec{R}\wedge(\vec{H}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}) = \vec{0}$$

en posant $O\vec{P} = (x,y,z)$ et en développant les calculs, il vient : $\begin{cases} x+z=0 \\ y=1 \end{cases}$

ce sont les équations analytiques de l'axe central. En fait ce sont les équations de deux plans ($x+z=0$ et $y=1$) dont l'intersection est une droite qui représente l'axe central du torseur. La relation qui lie le moment résultant $\vec{H}(P)$ à la résultante $\vec{R}$ est : $\vec{H}(P) = \lambda\vec{R}$.

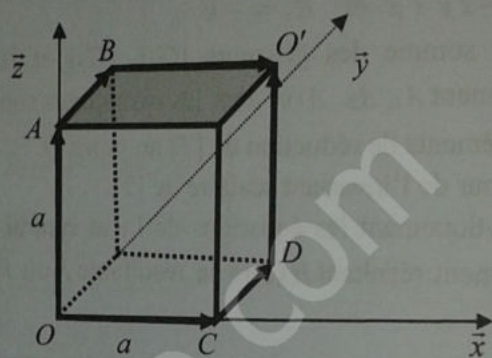
avec $\lambda = pas\ du\ torseur\ [T] = \frac{I_S}{\vec{R}^2} = \frac{-2}{2} = -1$. D'où : $\vec{H}(P) = -\vec{R}$.

Exercice n° 5 : somme de glisseurs

Notions abordées

- **Invariant scalaire**
- **Equations analytiques de l'axe central**
- **Système équivalent**

Un système de six vecteurs glissants est disposé suivant les arêtes d'un cube, d'arête a, comme l'indique la figure ci-après.



Q1- Calculer les éléments de réduction de $[T]$ en un point P quelconque.
Q2- En déduire la valeur de l'invariant scalaire de $[T]$. Commenter le résultat obtenu.
Q3- Déterminer analytiquement les équations de l'axe central de $[T]$ et montrer que le système est équivalent à un vecteur unique que l'on déterminera.

Solution détaillée

R1- $\vec{R} = 2a\vec{x} + 2a\vec{y} + 2a\vec{k}$; $\vec{H}(P) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

Pour un vecteur $\vec{V}$ d'origine A : $\vec{H}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}$, en développant le calcul, on trouve $\vec{H}(O) = \vec{0}$.

Donc :

$$\boxed{\vec{H}(P) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{cases} 2a(z-y) \\ 2a(x-z) \\ 2a(y-x) \end{cases}}$$

R2-

$$\boxed{I_S = \vec{R}.\vec{H}(P) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2a(z-y) \\ 2a(x-z) \\ 2a(y-x) \end{pmatrix} = 0}$$

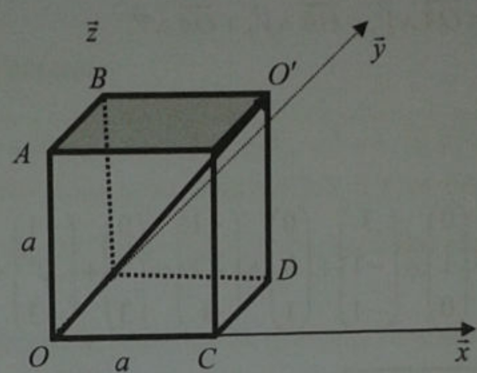
Commentaire

$I_S = 0$, donc le système est équivalent à un glisseur de résultante générale $\vec{R}$.

$\boxed{\text{R3-}}$ L'axe central es l'ensemble des points P tel que : $\vec{H}(P) = \lambda\vec{R}$.

Or $\lambda = 0$ car $I_S = 0$ donc $\vec{H}(P) = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z$ (équations de l'axe central).

L'axe central est donc la diagonale du cube. Le système est équivalent à un vecteur unique égal à $\vec{R}$ et porté par $\overrightarrow{OO'}$.



Exercice n° 6 : somme de deux torseurs

Notions abordées

- **Eléments de réduction**
- **Invariant scalaire**
- **Axe central**
- **Somme de deux torseurs**
- **Comoment de deux torseurs**

Soit le torseur $[T_1]$ défini au point O, origine d'un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, par les trois vecteurs suivants :

$\vec{V}_1 = -2\vec{x} + 3\vec{y} - 7\vec{z}$ défini au point A $(1, 0,0)$

$\vec{V}_2 = 3\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}$ défini au point B $(0, 1,0)$

$\vec{V}_3 = -\vec{x} - 2\vec{y} + 8\vec{z}$ défini au point C $(0, 0,1)$

et soit $[T_2]$ le torseur défini au point O par :

$$[T_2] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 = 2\vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z} \\ \vec{M}_2(O) = -3\vec{x} + 2\vec{y} - 7\vec{z} \end{array} \right._O$$

$\boxed{\text{Q1-}}$ Déterminer les éléments de réduction de $[T_1]$ au point O.

$\boxed{\text{Q2-}}$ Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]$.

Q3- Calculer la somme des deux torseurs.
Q4- Calculer le comoment des deux torseurs.
Q5- Calculer l'invariant scalaire du torseur somme $[T]= [T_1] + [T_2]$.

Solution détaillée

R1- $[T_1]=\begin{cases} \vec{R}_1=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3 \\ \vec{M}_1(O)=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}_1+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V}_2+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}_3 \end{cases}$

avec :
$\vec{R}_1=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=\vec{0}$
et

$$\vec{M}_1(O)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\3\\-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}=\vec{x}+6\vec{y}$$

d'où :

$$\boxed{[T_1]=_O\begin{cases}\vec{R}_1=\vec{0}\\ \vec{M}_1(O)=\vec{x}+6\vec{y}\end{cases}}$$

R2- Le pas du torseur $[T_2]$ est:

$$\boxed{\lambda=\frac{\vec{R}_2.\vec{M}_2(O)}{\vec{R}_2^{\,2}}=-\frac{11}{7}}$$

l'axe central du torseur $[T_2]$ est défini par : $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{R}_2\wedge\vec{M}_2(O)}{\vec{R}_2^{\,2}}+\alpha\vec{R}_2$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\2\\-7\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{14}+2\alpha\\ \frac{5}{14}+\alpha\\ \frac{1}{2}+3\alpha\end{pmatrix}$$

R3- La somme des deux torseurs est :

$$\boxed{[T]_O=[T_1]_O+[T_2]_O=\begin{cases}\vec{R}=\vec{R}_1+\vec{R}_2=2\vec{x}+\vec{y}+3\vec{z}\\ \vec{M}(O)=\vec{M}_1(O)+\vec{M}_2(O)=-2\vec{x}+8\vec{y}-7\vec{z}\end{cases}}$$

R4- Le comoment des deux torseurs est :

$$\boxed{[T_1]\otimes[T_2]=\vec{R}_1.\vec{M}_2(O)+\vec{R}_2.\vec{M}_1(O)=8}$$

R5- L'invariant scalaire de $[T]$ est :

$$\boxed{I_S = \vec{R}.\vec{M}(O) = -17}$$

Exercice n° 7 : somme de vecteurs glissants

Notions abordées

- **Torseur associé à un système de vecteurs**
- **Torseur glisseur**
- **Torseur nul**
- **Vecteurs coplanaires**

On considère les trois vecteurs : $\vec{V}_1 = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{V}_2 = \vec{x} + \vec{z}$ et $\vec{V}_3 = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} - 2\vec{z}$ définis relativement à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et liés respectivement aux points $A(-\frac{1}{2},1,0)$, $B(0,0,-\frac{1}{2})$ et $C(-\frac{1}{2},0,-1)$. α,β sont des nombres réels.

Q1- Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T]$ associé au système de vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ *et* $\vec{V}_3$ au point O.

Q2- Montrer que quels que soient α,β le torseur est un glisseur.

Q3- Trouver les coordonnées des points P où $\vec{M}(P) = \vec{0}$.

Q4- Pour quelles valeurs de α,β le torseur est-t-il nul ? Vérifier que pour ces valeurs les trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ *et* $\vec{V}_3$ sont coplanaires.

Solution détaillée

R1- $$[T] = {}_O\begin{cases} \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ \vec{M}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \end{cases}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \beta+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}(O) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta+1 \\ -\alpha-1 \\ (-\beta-1)/2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = (\alpha+1)\vec{x} + (\beta+1)\vec{y} \\ \vec{M}(O) = (\beta+1)\vec{x} - (\alpha+1))\vec{y} - \dfrac{(\beta+1)}{2}\vec{z} \end{cases}}$$

R2- $\vec{R} \neq \vec{0}$; $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$ et $I_S = \vec{R}.\vec{M}(O) = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \beta+1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta+1 \\ -\alpha-1 \\ (-\beta-1)/2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Le torseur est un glisseur.

R3- $\vec{M}(P) = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \wedge \vec{R} = \vec{M}(O)$. Cette équation admet une infinité de solutions :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{\vec{R}^2} + \lambda\vec{R} = \frac{1}{(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2} \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \beta+1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta+1 \\ -\alpha-1 \\ (-\beta-1)/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \beta+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-(\beta+1)^2}{2(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2} + \lambda(\alpha+1) \\ \dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2} + \lambda(\beta+1) \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in IR$$

R4- Le torseur est nul si $\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}(O) = \vec{0} \end{cases}$

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\vec{M}(O) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

donc le torseur est nul pour $\alpha = \beta = -1$.

pour ces valeurs on a : $\vec{V}_1 = \vec{y} + \vec{z}$; $\vec{V}_2 = \vec{x} + \vec{z}$ et $\vec{V}_3 = -\vec{x} - \vec{y} - 2\vec{z}$.

ces vecteurs sont coplanaires si leur produit mixte est nul :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)\vec{V}_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 - 1 + 2 = 0$$

Conclusion : les vecteurts sont coplanaires.

Exercice n° 8 : somme de glisseurs

Notions abordées

- **Torseur associé à un système de vecteurs**
- **Eléments de réduction**
- **Torseur glisseur**
- **Axe central**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère le torseur $[T]$, somme des glisseurs $(A_i,\vec{V}_i)$ définis par :

$$\overrightarrow{OA_1} = 3\vec{x}+\vec{y} \qquad \vec{V}_1 = -4\vec{z}$$
$$\overrightarrow{OA_2} = \vec{x}+2\vec{y} \qquad \vec{V}_2 = 8\vec{z}$$
$$\overrightarrow{OA_3} = \vec{x}+4\vec{y} \qquad \vec{V}_3 = -6\vec{z}$$
$$\overrightarrow{OA_4} = 2\vec{x}+6\vec{y} \qquad \vec{V}_2 = -7\vec{z}$$
$$\overrightarrow{OA_5} = 4\vec{x}+4\vec{y} \qquad \vec{V}_2 = 6\vec{z}$$

Q1- Exprimer les glisseurs $(A_i,\vec{V}_i)$ par leurs éléments de réduction en A_i.
Q2- Donner les éléments de réduction de $[T]$en O.
Q3- A quelle classe appartient ce torseur ?
Q4- Déterminer l'axe central de $[T]$.

Solution détaillée

R1- Exprimons les glisseurs par leurs éléments de réduction en A_i :

$$[G_1] = {}_{A_1}\begin{cases}\vec{R}_1 = -4\vec{z}\\ 0\end{cases} ; \quad [G_2] = {}_{A_2}\begin{cases}\vec{R}_2 = 8\vec{z}\\ 0\end{cases} ; \quad [G_3] = {}_{A_3}\begin{cases}\vec{R}_3 = -6\vec{z}\\ 0\end{cases} ; \quad [G_4] = {}_{A_4}\begin{cases}\vec{R}_4 = -7\vec{z}\\ 0\end{cases} ;$$

R2- En utilisant la loi de transport des moments, on a :

$$\vec{M}(O) = \vec{M}(A_i) + \vec{R}_i \wedge \overrightarrow{A_iO}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix} = -4\vec{x}+12\vec{y} ; \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = 16\vec{x}-8\vec{y}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix}=-24\vec{x}+6\vec{y}\ ;\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\-6\\0\end{pmatrix}=-42\vec{x}+14\vec{y}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\end{pmatrix}=-24\vec{x}-24\vec{y}$$

le torseur somme est :

$$\boxed{[T]=[G_1]+[G_2]+[G_3]+[G_4]+[G_5]=\left\{\begin{matrix}-3\vec{z}\\-30\vec{x}\end{matrix}\right._O}$$

R3- La résultante n'est pas nulle et l'invariant scalaire de ce torseur est nul, c'est donc un glisseur.

R4- L'axe central est de direction $\vec{z}$ comme la résultante. Un point P de cet axe central est :

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{R}\wedge\vec{M}(O)}{\vec{R}^2}+\alpha\vec{R}=\frac{(-3\vec{z})\wedge(-30\vec{x})}{9}+\alpha\vec{z}=10\vec{y}+\alpha\vec{z}}$$

Exercice n° 9 : détermination de la résultante d'un torseur

Notions abordées

- **Résultante d'un torseur**
- **Champ de moments d'un torseur**
- **Axe central**
- **Moment central**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le champ des moments d'un torseur est connu en trois points O, A et B :

$$\vec{H}(O)=\vec{x}+\vec{y}+4\vec{z}$$
$$\vec{H}(A)=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$$
$$\vec{H}(B)=2\vec{x}-\vec{y}+9\vec{z}$$

où $A\ (3, 0, 0)$ et $B\ (-1, 2, 1)$.

Q1- Déterminer la résultante $\vec{R}$ du torseur associé au champ $\vec{H}$.

Q2- En déduire $\vec{H}(P)$ en tout point $P(x, y, z)$ de l'espace.

Q3- Déterminer l'axe central (Δ) du torseur et calculer $\vec{H}$ pour un point appartenant à (Δ).

Solution détaillée

R1- Si $\vec{R}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est la résultante du torseur, alors on a : $\vec{H}(A) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OA}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ Y = 1 \end{cases}$$

et $\vec{H}(B) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OB}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y - 2Z \\ -Z - X \\ 2X + Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

or $\begin{cases} Y = 1 \\ Z = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 2$

d'où :

$$\boxed{\vec{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

R2- $\vec{H}(P) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ 1 - 2z \\ 4 + 2y - x \end{pmatrix}$

R3- L'axe central est l'ensemble des points P tel que : $\vec{H}(P) = \lambda\vec{R}$

$$\Leftrightarrow \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + z = 2\lambda \\ 1 - 2z = \lambda \\ 4 + 2y - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2y - x = 0 \\ z = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Pour un point $P(x,y,z) \in (\Delta)$ on a : $\begin{cases} 4+2y-x=0 \\ z=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

or $\quad \vec{H}(P)=\begin{pmatrix} 1+z \\ 1-2z \\ 4+2y-x \end{pmatrix}$

d'où :

$$\boxed{\vec{H}(P)\Big|_{P\in(\Delta)}=\begin{pmatrix} 6/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice n° 10 : résultante et axe central d'un torseur

Notions abordées

- **Champ des moments d'un torseur**
- **Axe central d'un torseur**

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct et soit $\overrightarrow{M}$ le champ de vecteurs défini par :

$$\overrightarrow{M}(P)=\begin{pmatrix} a-\lambda^2 y+\lambda z \\ b+x-3z \\ c-\lambda x+3y \end{pmatrix}$$

où *(x, y, z)* sont les coordonnées du point *P* dans (R), *a, b, c* sont des constantes données et λ un paramètre réel.

Q1- Déterminer les valeurs de λ pour que le champ $\overrightarrow{M}$ soit un torseur dont on précisera la résultante.

Q2- Pour chaque valeur de λ, solution de la question-1, déterminer l'axe central du torseur.

Solution détaillée

R1-

$$\overrightarrow{M}(P)-\overrightarrow{M}(O)=\begin{pmatrix} -\lambda^2 y+\lambda z \\ x-3z \\ -\lambda x+3y \end{pmatrix}$$

Le champ $\overrightarrow{M}$ est un torseur, si et seulement si, il existe un vecteur $\vec{R}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ tel que :

$$\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta z-\gamma y\\ \gamma x-\alpha y\\ \alpha y-\beta x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda^2 y+\lambda z\\ x-3z\\ -\lambda x+3y\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\lambda\\ \alpha=3\\ \gamma=\lambda^2=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lambda=\pm 1}$$

$$-\text{ Si } \lambda=1\Rightarrow\vec{R}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$-\text{ Si } \lambda=-1\Rightarrow\vec{R}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

R2- – Pour $\lambda=1$: $\vec{R}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, on a : $\overrightarrow{M}(P)=\overrightarrow{M}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{R}$

après développement de calcul, il vient :

$$\boxed{\frac{a+z-y}{3}=\frac{b+x-3z}{1}=\frac{c+3y-x}{1}}$$

équations paramétriques de l'axe central

– Pour $\lambda=-1$: $\vec{R}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{M}(P)=\overrightarrow{M}(O)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{R}$$

après développement de calcul, il vient :

$$\boxed{\frac{a-z-y}{3}=\frac{b+x-3z}{-1}=\frac{c+3y+x}{1}}$$

équations paramétriques de l'axe central

Exercice n° 11 : combinaison linéaire de deux torseurs

Notions abordées

- **Glisseur**
- **Invariant scalaire**
- **Combinaison linéaire de deux torseurs**
- **Axe central**
- **Surface engendrée par l'axe central**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ on considère les deux glisseurs suivants :

$[G_1]$ dont les éléments de réduction sont donnés par :

$$[G_1] = \begin{cases} \vec{R}_1 = \cos\theta\vec{x} + \sin\theta\vec{y} \\ \vec{M}_1(O) = \vec{0} \end{cases}_O$$

$[G_2]$ dont les éléments de réduction sont donnés par :

$$[G_2] = \begin{cases} \vec{R}_2 = \vec{y} \\ \vec{M}_2(O) = 2\sin\theta\vec{x} \end{cases}_O$$

Q1- Quel est le support du glisseur $[G_2]$?

Q2- Calculer l'invariant scalaire du torseur $[T]$ tel que :

$$[T] = [G_1] + [G_2]$$

Q3- Déterminer l'axe central du torseur $[T]$.

Q4- Déterminer l'équation cartésienne de la surface engendrée par l'axe central de $[T]$ lorsque θ varie. Quel est son nom ?

Solution détaillée

R1- $[G_2]$ étant un glisseur, l'axe central est le support de sa résultante $\vec{R}_2$.

Si P est un point de l'axe central, alors :

$\vec{M}_2(O) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{R}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2\sin\theta \\ x = 0 \end{cases}$$

R2- $[G_2]$ étant un glisseur, l'axe central est le support de sa résultante $\vec{R}_2$.

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} &\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \cos\theta\vec{x} + (1+\sin\theta)\vec{y} \\ &\vec{M}(O) = \vec{M}_1(O) + \vec{M}_2(O) = 2\sin\theta\vec{x} \end{aligned}\right._O}$$

l'invariant scalaire de $[T]$ est $I_S = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \neq 0$.

R3- Soit $P(x, y, z)$ un point de l'axe central, alors on a :

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1+\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1+\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{(1+\sin\theta)z + 2\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-z\cos\theta}{1+\sin\theta} \\ \\ &y\cos\theta - (1+\sin\theta)x = 0 \end{aligned}\right.$$

d'où :

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} &z = -\sin\theta \quad (1) \\ &y\cos\theta - (1+\sin\theta)x = 0 \quad (2) \end{aligned}\right.}$$

R4- Pour déterminer l'équation cartésienne de la surface engendrée par l'axe central de $[T]$, il suffit d'éliminer θ dans (1) et (2) :

$$(2) \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-z}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1-z}{1+z}$$

soit :

$$\boxed{z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

c'est une conoïde de Plucker ou cylindroïde.